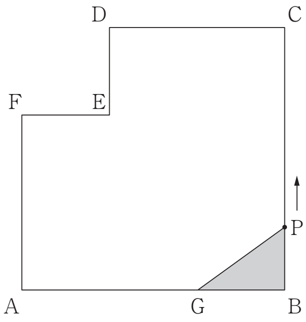
第13講　点の移動

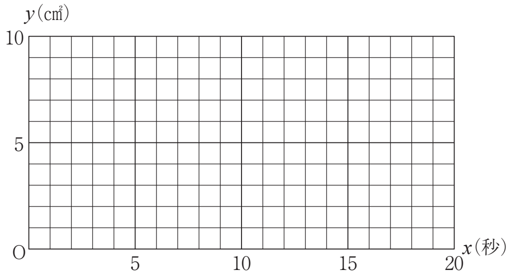
Step 1

1 右の図のように，1辺が6 cmの正方形から1辺が2 cmの正方形を切り取ってできた図形ABCDEFがあり，DE = EF = 2 cmである。点Gは辺AB上にあって，GB = 2 cmである。

点Pは，Bを出発して毎秒1 cmの速さで辺BC, CD, DE, EF, FA上をAまで動く。PがBを出発してからx秒後の△GBPの面積をy cm^{2}とする。



① PがBからAまで動くときの，xとyの関係をグラフに表しなさい。

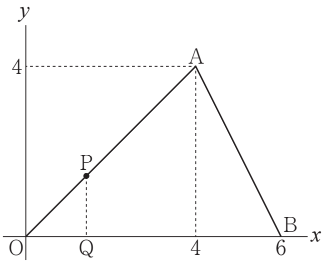


② PがBからAまで動く間に，y = 5となるxの値が2つある。その2つの値を求めなさい。

【熊本県】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製·転載を禁止します。

2　右の図のように，3点O(0，0)，A(4，4)，B(6，0)を頂点とする△OABがある。点Pは，原点Oを出発して辺OA上を点Aまで動き，点Aからは辺AB上を点Bまで動く。点Pからx軸にひいた垂線とx軸との交点をQとし，点Pのx座標をt，△OPQの面積をSとする。ただし，$t = 0$，6のとき，S = 0とする。



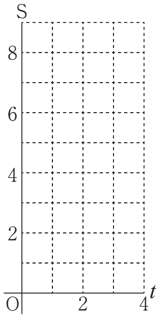
このとき，次の問いに答えなさい。

1　直線ABの式を求めよ。

2　$0 \leqq t \leqq 4$のとき，

(1)　Sをtの式で表し，そのグラフをかけ。

(2)　(1)の関数について，tの値が1から3まで増加するときの変化の割合を求めよ。



3　点Pが辺ABの中点にきたときのSの値を求めよ。

4　$4 \leqq t \leqq 6$のとき，S = 6となるようなtの値を求めよ。

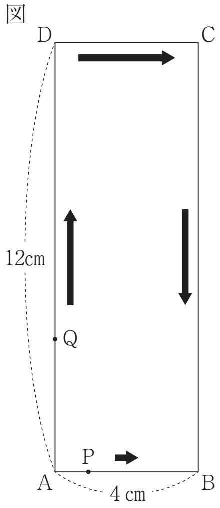
【愛媛県】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。

Step 2

3 図のように，AB ＝ 4 cm，AD ＝ 12cm の長方形 ABCD がある。点 P は毎秒 1 cm の速さで辺 AB 上を A から B まで動き，B に到達したあとは動かないものとする。また，点 Q は点 P と同時に A を出発し，毎秒 4 cm の速さで辺上を A から D，C の順に通って B まで動き，B に到達したあとは動かないものとする。2 点 P，Q が A を同時に出発してから x 秒後の△APQ の面積を y cm^2 とする。このとき，次の問いに答えなさい。

図



問 1　x ＝ 2 のとき，線分 AQ の長さは何 cm か。

問 2　x ＝ 5 のとき，y の値を求めよ。

問 3　次の(1)，(2)の [(ア)] ～ [(オ)] にあてはまる数または式を答えよ。

(1) 点 Q が A から D まで動くのは，[(ア)] ≦ x ≦ [(イ)] のときである。このとき，y を x の式で表すと，y ＝ [(ウ)] である。

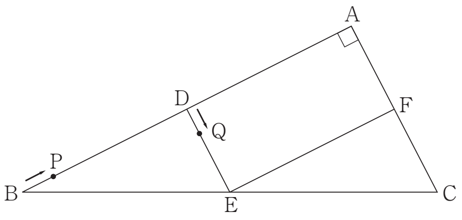
(2) 点 Q が D から C まで動くのは，[(イ)] ≦ x ≦ [(エ)] のときである。このとき，y を x の式で表すと，y ＝ [(オ)] である。

問 4　△APQ の面積が 6 cm^2 となるときの x の値をすべて求めよ。

【長崎県】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。

4 右の図のように，∠A = 90°，AB = 12cm，AC = 6cm の直角三角形 ABC があり，辺 AB，BC，CA の中点をそれぞれ D，E，F とする。点 P は頂点 B を出発し，線分 BA 上を頂点 A まで毎秒 1cm の速さで，また，点 Q は点 D を出発し，線分 DE，EF，FC 上を頂点 C まで毎秒 1cm の速さで動くものとする。



2 点 P，Q が同時に出発してから x 秒後の△BPQ の面積を y cm^2 とするとき，次の(1)，(2)の問いに答えなさい。

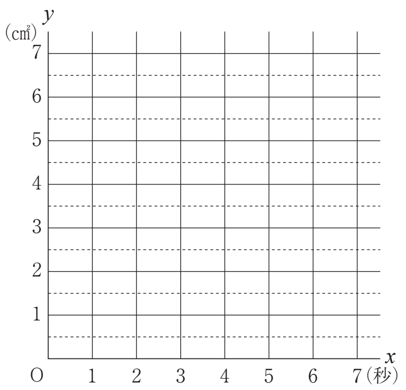
ただし，$x = 0$ のとき $y = 0$ とする。

(1) 点 Q が線分 DE 上を動くとき，次の(a)〜(c)の問いに答えなさい。

(a) x の変域を求めなさい。

(b) y を x の式で表しなさい。

(c) (a)，(b)より，x と y の関係をグラフで表しなさい。



(2) △BPQ の面積が $\frac{55}{2}$ cm^2 になるのは，点 Q が点 D を出発してから何秒後か求めなさい。

【千葉県】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

Step 3

5　図1のような，AB = 9cm，AD = 8cm，AE = 12cmの直方体ABCD—EFGHがある。点PはAを出発し，長方形ABFEの辺上を毎秒3cmの速さでA→B→F→Eの順に進み，Eで停止する。点Qは点Pが出発すると同時にAを出発し，長方形ADHEの辺上を毎秒2cmの速さでA→D→Hの順に進み，Hで停止する。

点PがAを出発してからx秒後の三角錐(すい)AEPQの体積をy cm^{3}とする。ただし，点PがAまたはEにあるときは$y = 0$とする。

図2は点PがAを出発してから4秒後までのxとyの関係を表したグラフである。

このとき，次の1，2，3，4の問いに答えなさい。

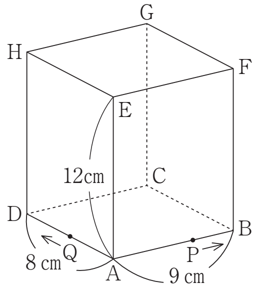


図1

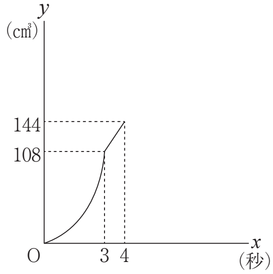
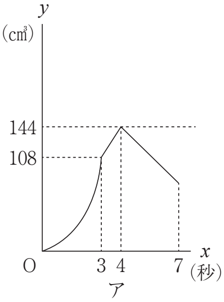


図2

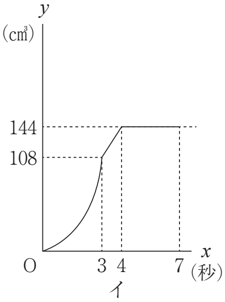
1　点PがAを出発してから2秒後の三角錐AEPQの体積を求めなさい。

2　点PがAを出発して3秒後から4秒後までのxとyの関係を式で表しなさい。ただし，途中の計算も書くこと。

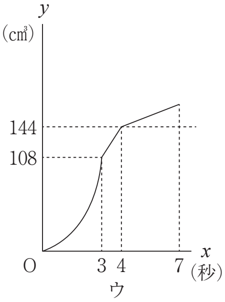
3　点PがAを出発してから7秒後までのxとyの関係を表すグラフとして適するものを，ア，イ，ウ，エのうちから1つ選んで記号で答えなさい。



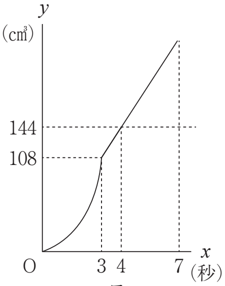
ア



イ



ウ



エ

4　三角錐AEPQの体積が直方体ABCD—EFGHの体積の$\frac{1}{32}$になるのは，点PがAを出発してから何秒後か。すべて求めなさい。

【栃木県】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。

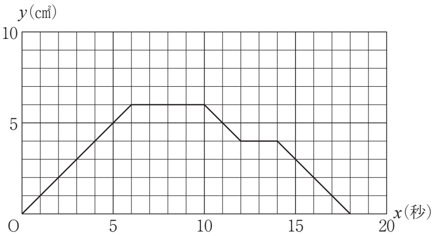
〈 ***Note*** 〉

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。

第13講　点の移動

Step 1

1　① (右図)　② 5, 11

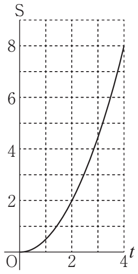


≪解説≫

① 点Pが各頂点に到達するのは, 6秒後に点C, 10秒後に点D, 12秒後に点E, 14秒後に点F, 18秒後に点A。また, GBと各頂点を結んでできる三角形の面積は, △GBC ＝△GBD ＝ $\frac{1}{2}$ × 2 × 6 ＝ 6 (cm^2), △GBE ＝△GBF ＝ $\frac{1}{2}$ × 2 × 4 ＝ 4 (cm^2)　よって, グラフは(0, 0), (6, 6), (10, 6), (12, 4), (14, 4), (18, 0)を結ぶ折れ線となる。

② △GBPの底辺をGBとすると, y ＝ 5となるのは高さが, 5 × 2 ÷ 2 ＝ 5 (cm)のとき。よって, 点PがBC上にあり, BP ＝ 5cmになるときと, 点PがDE上にあり, DP ＝ 1cmになるときに高さが5cmなので, x ＝ 5, 11

2　1. y ＝－ 2x ＋ 12　2. (1) (式) S ＝ $\frac{1}{2}t^2$　(グラフ) (右図)　(2) 2　3. (S ＝) 5　4. (t ＝) 3 ＋ $\sqrt{3}$



≪解説≫

1. 傾きは, $\frac{0-4}{6-4}$ ＝－ 2なので, 直線ABの式を y ＝－ 2x ＋ b とおいて, 点Bの座標を代入すると, 0 ＝－ 2 × 6 ＋ b より, b ＝ 12　よって, y ＝－ 2x ＋ 12

2. (1) 直線OAの式は y ＝ x なので, 0 ≦ t ≦ 4のとき, △OPQは, OQ ＝ PQの直角二等辺三角形となる。よって, S ＝ $\frac{1}{2}$ × t × t ＝ $\frac{1}{2}t^2$ となり, グラフは上図のようになる。(2) t ＝ 1のとき, S ＝ $\frac{1}{2}$ × 1^2 ＝ $\frac{1}{2}$, t ＝ 3のとき, S ＝ $\frac{1}{2}$ × 3^2 ＝ $\frac{9}{2}$ となるので, 変化の割合は, $\left(\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\right)$ ÷ (3 － 1) ＝ 2

3. 点Pの x 座標は, $\frac{4+6}{2}$ ＝ 5　点Pの y 座標は, $\frac{4+0}{2}$ ＝ 2　よって, OQ ＝ 5, PQ ＝ 2となるので, S ＝ $\frac{1}{2}$ × 5 × 2 ＝ 5

4. 4 ≦ t ≦ 6のとき, 点Pは辺AB上にあるので, 点Pの x 座標が t のとき, y 座標

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

は，$-2t+12$　よって，$OQ=t$，$PQ=-2t+12$ となるので，$S=\frac{1}{2}\times t\times(-2t+12)=-t^2+6t$　これが6なので，$-t^2+6t=6$ より，$t^2-6t+6=0$　解の公式より，$t=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\times1\times6}}{2}=3\pm\sqrt{3}$　$4\leqq t\leqq 6$ より，$t=3+\sqrt{3}$

Step 2

3 問1．8(cm)　問2．$(y=)\,16$　問3．(ア) 0　(イ) 3　(ウ) $2x^2$　(エ) 4　(オ) $6x$　問4．$\sqrt{3}$，$\frac{25}{4}$

≪解説≫

問1．点Qは辺AD上にあり，$AQ=4\times2=8$ (cm)

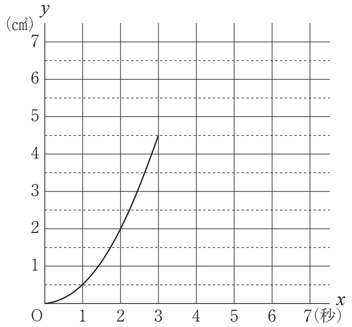
問2．点Pは頂点B上に，点Qは辺CB上にある。$AD+DC+CB=12+4+12=28$ (cm)だから，$BQ=28-4\times5=8$ (cm)　よって，$y=\frac{1}{2}\times4\times8=16$

問3．(1) $12\div4=3$ より，点QがAからDまで動くのは，$0\leqq x\leqq3$ のときで，$AP=x$ cm，$AQ=4x$ cm だから，$y=\frac{1}{2}\times x\times4x=2x^2$　(2) $(12+4)\div4=4$ より，点QがDからCまで動くのは，$3\leqq x\leqq4$ のときで，△APQのAPを底辺としたときの高さは12cmで一定となる。このとき，$AP=x$ cm だから，$y=\frac{1}{2}\times x\times12=6x$

問4．(i) $0\leqq x\leqq3$ のとき，$2x^2=6$ より，$x^2=3$ となり，$x=\pm\sqrt{3}$ なので，$x=\sqrt{3}$ が適する。(ii) $3\leqq x\leqq4$ のとき，$6x=6$ より，$x=1$　これは x の範囲外なので適さない。(iii) $4\leqq x\leqq7$ のとき，$y=\frac{1}{2}\times4\times(28-4x)=-8x+56$ と表されるから，$-8x+56=6$ より，$x=\frac{25}{4}$　(i)～(iii)より，$x=\sqrt{3}$，$\frac{25}{4}$

4 (1) (a) $0\leqq x\leqq3$　(b) $y=\frac{1}{2}x^2$　(c) (右図)

(2) 11 (秒後)



≪解説≫

(1) (a) 中点連結定理より，$DE=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\times6=3$ (cm)

よって，点Qが辺DEを進むのにかかる時間は，$3\div1=3$ (秒)より，x の変域は，$0\leqq x\leqq3$　(b) DE∥AFより，∠BDE＝∠BAC＝90°で，△BPQは，辺BPを底辺としたときの高さがDQになる。$BP=DQ=x$ cm より，△BPQの面積は，$\frac{1}{2}\times x\times x=\frac{1}{2}x^2$ (cm^2)　よって，$y=\frac{1}{2}x^2$　(c) $x=0$ のとき，$y=0$　$x=1$ のとき，$y=\frac{1}{2}\times1^2=\frac{1}{2}$　$x=2$ のとき，$y=$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$\frac{1}{2}\times 2^2 = 2$　$x = 3$ のとき，$y = \frac{1}{2}\times 3^2 = \frac{9}{2}$　よって，$(0,\ 0)$，$\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$，$(2,\ 2)$，$\left(3,\ \frac{9}{2}\right)$ を通る放物線をかけばよい。

(2) (1)より，$0 \leqq x \leqq 3$ のとき，△BPQ の面積は最大でも $\frac{9}{2}\text{cm}^2$。点 Q が線分 EF 上を動くとき，$\text{EF} = \text{DA} = 12 \times \frac{1}{2} = 6\ (\text{cm})$ で，$3 + 6 \div 1 = 9$ より，x の変域は $3 \leqq x \leqq 9$ このときの△BPQ の面積は，$\frac{1}{2}\times \text{BP}\times \text{DE} = \frac{1}{2}\times x \times 3 = \frac{3}{2}x\ (\text{cm}^2)$ と表せるので，最大でも，$\frac{3}{2}\times 9 = \frac{27}{2}\ (\text{cm}^2)$　点 Q が線分 FC 上を動くとき，$9 + 3 \div 1 = 12$ より，x の変域は $9 \leqq x \leqq 12$　このときの△BPQ の面積は，$\frac{1}{2}\times \text{BP}\times (\text{FQ} + \text{AF}) = \frac{1}{2}\times x \times (x - 9 + 3) = \frac{1}{2}x\ (x - 6)\ (\text{cm}^2)$　よって，$\frac{1}{2}x\ (x - 6) = \frac{55}{2}$　整理すると，$x^2 - 6x - 55 = 0$ となるので，$(x + 5)(x - 11) = 0$ より，$x = -5,\ 11$　$9 \leqq x \leqq 12$ より，$x = 11$ だから，△BPQ の面積が $\frac{55}{2}\text{cm}^2$ になるのは 11 秒後。

Step　3

5　1. $48\ (\text{cm}^3)$　2. $y = 36x$　3. イ　4. $\frac{3}{2}$ (秒後)，$\frac{151}{16}$ (秒後)

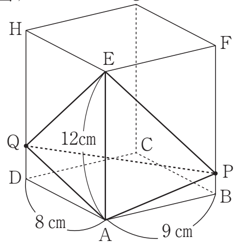
≪解説≫

1. $\text{AP} = 3 \times 2 = 6\ (\text{cm})$，$\text{AQ} = 2 \times 2 = 4\ (\text{cm})$ なので，$\triangle\text{APQ} = \frac{1}{2}\times 6 \times 4 = 12\ (\text{cm}^2)$　よって，三角錐 AEPQ $= \frac{1}{3}\times 12 \times 12 = 48\ (\text{cm}^3)$

2. 3 秒後から 4 秒後までのグラフの傾きは，$\frac{144 - 108}{4 - 3} = 36$ だから，x と y の関係式は，$y = 36x + b$ と表せる。これに $(3,\ 108)$ を代入して，$108 = 36 \times 3 + b$ より，$b = 0$ よって，$y = 36x$

3. 4 秒後から 7 秒後までは，右図アのように，点 P は辺 BF 上，点 Q は辺 DH 上にある。このとき三角錐 AEPQ の底面を△APE とすると，底面積は，$\frac{1}{2}\times 12 \times 9 = 54\ (\text{cm}^2)$，高さは 8 cm で一定なので，体積も，$y = \frac{1}{3}\times 54 \times 8 = 144$ で一定になる。よって，グラフはイ。

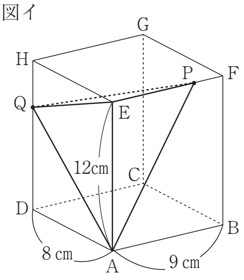
図ア



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。

4. 直方体 ABCD―EFGH の体積の $\frac{1}{32}$ は，$9 \times 8 \times 12 \times \frac{1}{32} = 27$ (cm^3)　図 2 のグラフより，3 秒後までの x と y の関係を $y = ax^2$ とおいて(3，108)を代入すると，$108 = a \times 3^2$ より，$a = 12$　よって，$y = 12x^2$ に $y = 27$ を代入して，$27 = 12x^2$ より，$x^2 = \frac{9}{4}$　$x \geqq 0$ より，$x = \frac{3}{2}$　また，7 秒後以降は右図イのように，点 P は辺 FE 上，点 Q は辺 DH 上にある。このとき，三角錐 AEPQ の底面を△AQE とすると，底面積は，$\frac{1}{2} \times 12 \times 8 = 48$ (cm^2)，高さは，PE =(9 + 12 + 9) − 3x = 30 − 3x (cm)なので，$y = \frac{1}{3} \times 48 \times (30 - 3x) = -48x + 480$　これに $y = 27$ を代入して，$27 = -48x + 480$ より，$x = \frac{151}{16}$　以上より，$\frac{3}{2}$ 秒後と $\frac{151}{16}$ 秒後。

図イ



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製･転載を禁止します。